

Научная статья

УДК 517.956.4+517.968.2

DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-42-66

# СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Обиджан Салижанович Зикиров

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,  
Ташкент, Узбекистан

zikirov@yandex.com; <https://orchid.org/0009-0001-0168-2707>

## *Аннотация*

В данной работе доказано существование единственного решения нелокальных задач в прямоугольной области для уравнения в частных производных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. При доказательстве разрешимости задачи применяются методы теории дифференциальных уравнений, функции Грина и теории интегральных уравнений. Изучаемые задачи сводятся к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое безусловно разрешимо.

## *Ключевые слова и фразы*

Ключевые слова: краевая задача, регулярное решение, нелокальное условие, интегральное условие, нелокальная задача, уравнение теплопроводности, функция Грина, интегральное уравнение, уравнение Вольтерра, уравнение Абеля.

## *Для цитирования*

Зикиров О. С. Смешанные краевые задачи с интегральными условиями для уравнения третьего порядка // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 1, С. 42-66. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-42-66

## Mixed boundary value problems with integral conditions for a third-order equation

Obidjon S. Zikirov

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent,  
Uzbekistan

zikirov@yandex.com; <https://orchid.org/0009-0001-0168-2707>

---

© Зикиров О. С., 2026

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 42-66

Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 42-66

*Abstract*

In this paper, we prove the existence of a unique solution to non-local problems in a rectangular domain for a third-order partial differential equation with the thermal conductivity operator in the main part. Methods of the theory of differential equations, the Green's function and the theory of integral equations are used to prove the solvability of the problem. The problems under study are reduced to the equivalent Volterra integral equation of the second kind, which is certainly solvable.

*Keywords*

boundary value problem, regular solution, nonlocal condition, integral condition, nonlocal problem, heat equation, Green's function, integral equation, Volterra equation, Abel equation.

*For citation*

Zikirov O. S. Mixed boundary value problems with integral conditions for a third-order equation // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 1, P. 42-66. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-42-66

## Введение

Исследование разрешимости смешанных краевых задач с интегральными условиями для уравнений в частных производных третьего порядка представляет собой важную область исследования в теории дифференциальных уравнений и их приложений. Разрешимость нелокальных задач для дифференциальных уравнений третьего порядка представляется важным как с точки зрения развития теории начально-краевых задач для неклассических уравнений в частных производных, так и с точки зрения приложений математического моделирования различных процессов.

Изучение разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для параболических уравнений началось, по-видимому, с работ [1] и [2]. Смешанные задачи с интегральными условиями для параболического уравнения были рассмотрены в работах [3]–[9], но при этом, в основном исследовались уравнения второго порядка, как в одномерных [3]–[7], так и в многомерных [8]–[9] областях.

Различные нелокальные задачи с интегральными условиями для отдельных типов уравнений в частных производных третьего порядка изучались во многих работах (см. например [10]–[14]).

В данной работе изучаются нелокальные граничные задачи с интегральными условиями для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части.

## § 1. Постановка нелокальной задачи 1

В области  $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$  рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

где  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  – заданные функции.

Заметим, что уравнение (1) в области  $D$  относительно старшей производной имеет трёхкратную характеристику  $t = const$ , по классификации работы [17] уравнение (1) соответствует первому каноническому виду. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на их разрешимость. В работе [22] уравнение (1) названо уравнением с кратными характеристиками и рассмотрены различные краевые задачи для этого уравнения.

**Нелокальная задача 1.** Найти регулярное в области  $D$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

граничным

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(0, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и интегральным условиям

$$u(l, t) = \alpha(t) \int_0^l u(x, t) dx + \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\mu_i(t)$ , ( $i = \overline{1, 3}$ ) – заданные, непрерывные на  $[0, l]$  и  $[0, T]$  соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0); \quad \varphi'(0) = \mu_2(0); \quad \varphi(l) = \alpha(0) \int_0^l \varphi(x) dx + \mu_3(0).$$

Заметим, что из этой задачи при  $\alpha(t) = 0$ , следует задача, изученная в работе [22] для уравнения (1). Поэтому требуем, что  $\alpha(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$ .

В поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, рассмотренная в работе [18]. Заметим, что в работах А. И. Кожанова и его учеников исследована разрешимость краевых задач, сочетающих задачи с нелокальными условиями А. А. Самарского и задачи с интегральными условиями.

Через  $C^{k,l}(D)$  обозначен класс функций  $u(x, t)$ , непрерывных вместе со своими частными производными порядка  $\partial^{m+n}u(x, t)/\partial x^m \partial t^n$  для всех  $m = \overline{0, k}$ ,  $n = \overline{0, l}$ ;  $C^{0,0}(D)$  обозначим через  $C(D)$ .

**Определение 1.** Под *регулярным в области  $D$  решением нелокальной задачи 1* будем понимать функцию  $u(x, t)$ , из класса  $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$ , удовлетворяющую условиям (1)–(4) в обычном смысле.

## § 2. Разрешимость нелокальной задачи 1

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве  $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$ , при этом, справедлива следующая теорема о разрешимости исследуемой нелокальной задачи 1:

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие  $c(x, t)$ ,  $f(x, t) \in C(\overline{D})$  и заданные функции  $\varphi(x)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\mu_i(t)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют условиям  $\alpha(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$ ,  $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ ;  $\mu_1(t), \mu_3(t) \in C^1[0, T]$ ;  $\alpha(t), \mu_2(t) \in C[0, T]$ . Тогда существует единственное регулярное решение нелокальной задачи 1.

Построим явное решение нелокальной задачи 1 с помощью функции Грина для уравнения теплопроводности.

Вводя обозначение

$$u_x(x, t) = v(x, t), \quad (x, t) \in D. \quad (5)$$

уравнение (1) запишем в виде

$$v_t - v_{xx} = f_1(x, t), \quad (6)$$

где  $f_1(x, t) = f(x, t) - c(x, t)u(x, t)$ .

Тогда для определения функции  $v(x, t)$  в области  $D$  имеем следующую задачу:

**Задача 1.** Найти решение  $u(x, t)$  уравнения (6), удовлетворяющее следующим условиям

$$v(x, 0) = \varphi'(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (7)$$

$$v(0, t) = \mu_2(t), \quad v(\ell, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

где  $\mu(t)$  – пока неизвестная функция, которая определяется из условия (4).

**Замечание 1.** Задачу 2 будем решать в следующих предположениях:  $\varphi'(x)$  непрерывна и интегрируема на  $[0, l]$ ,  $\mu_2(t)$  непрерывна на  $[0, T]$  и предположим, что функция  $\mu(t)$  непрерывна и интегрируема на  $[0, T]$  и  $\mu_2(0) = \varphi'(0)$ ,  $\mu(0) = \varphi'(l)$ .

Функция Грина задачи 2 для уравнения теплопроводности задается формулой (см. например [20])

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n\ell)^2}{4(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n\ell)^2}{4(t-\tau)}\right] \right\}. \quad (9)$$

Доказательство абсолютной и равномерной сходимости ряда (9) за исключением члена при  $n = 0$  и рядов, полученных из него почленным дифференцированием любое число раз по  $x$  и  $t$  приведено в работе [21].

Тогда решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям (7) и (8), имеет вид

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \int_0^\ell \varphi'(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi + \int_0^t \mu(\tau) G_\xi(x, t; \ell, \tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\ell G(x, t; \xi, \tau) f_1(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \mu_2(\tau) G_\xi(x, t; 0, \tau) d\tau - \int_0^t \int_0^\ell G(x, t; \xi, \tau) c(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая обозначение  $f_1(x, t)$ , из равенства (10) получим

$$\begin{aligned} u_x(x, t) = & F_0(x, t) + \int_0^t \mu(\tau) G_\xi(x, t; \ell, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^t \int_0^\ell G(x, t; \xi, \tau) c(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь

$$F_0(x, t) = \int_0^\ell \varphi'(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \mu_2(\tau) G_\xi(x, t; 0, \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\ell G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Интегрируя формулу (11) по  $x$  имеем

$$\begin{aligned} u(x, t) = F_1(x, t) - \int_0^t \mu(\tau) \left( \int_0^x G_\xi(z, t; \ell, \tau) dz \right) d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^\ell \left( \int_0^x G(z, t; \xi, \tau) dz \right) c(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $F_1(x, t) = \mu_1(t) + \int_0^x F_0(z, t) dz$ .

Полагая  $x = \ell$  в (12), получим

$$\begin{aligned} u(\ell, t) = F_1(\ell, t) - \int_0^t \mu(\tau) \left( \int_0^\ell G_\xi(z, t; \ell, \tau) dz \right) d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^\ell \left( \int_0^\ell G(z, t; \xi, \tau) dz \right) c(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

На основании вида функции Грина и равенства

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, t; \xi, \tau) = -\frac{\partial}{\partial x} G(x, t; \xi, \tau),$$

следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^\ell G_\xi(z, t; \ell, \tau) dz = \frac{-1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{n^2 \ell^2}{(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(n-1)^2 \ell^2}{(t-\tau)}\right] \right\} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 \ell^2}{4(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \ell^2}{4(t-\tau)}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^\ell G_\xi(z, t; \ell, \tau) dz = \frac{-1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - k_0(t, \tau),$$

где

$$k_0(t, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{n^2 \ell^2}{(t-\tau)} \right] - \exp \left[ -\frac{(2n-1)^2 \ell^2}{4(t-\tau)} \right] \right\}.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (13), имеем

$$u(\ell, t) = F_1(\ell, t) + \int_0^t \left( \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} + k_0(t, \tau) \right) \mu(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^\ell \left( \int_0^\ell G(z, t; \xi, \tau) dz \right) c(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (14)$$

Теперь интегрируя (12) по  $x$  в пределах от 0 до  $\ell$ , находим

$$\int_0^\ell u(x, t) dx = \int_0^\ell F_1(x, t) dx - \int_0^t \mu(\tau) \left( \frac{\ell}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} + \int_0^\ell G(x, t; \ell, \tau) dx \right) d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^\ell \left( \int_0^\ell \left[ \int_0^x G(z, t; \xi, \tau) dz \right] dx \right) c(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (15)$$

Подставляя (13) и (14) в условие (4), получим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[ \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + k_1(t, \tau) \right] \mu(\tau) d\tau = F_3(t), \quad (16)$$

здесь

$$k_1(t, \tau) = k_0(t, \tau) + \frac{\alpha(t)\ell}{\sqrt{t-\tau}} + \alpha(t) \int_0^\ell G(x, t; \ell, \tau) dx;$$

$$F_3(t) = F_2(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t k_1(t, \tau) \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\ell K(t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau;$$

$$K_1(t; \xi, \tau) = c(\xi, \tau) \int_0^\ell G(x, t; \xi, \tau) dx + \alpha(t) c(\xi, \tau) \int_0^\ell dx \int_0^x G(z, t; \xi, \tau) dz;$$

$$F_2(t) = \alpha(t) \int_0^\ell F_1(x, t) dx - F_1(\ell, t) + \mu_3(t).$$

Из условия согласования задачи 1 имеем, что  $F_2(0) = 0$ . Поэтому правая часть  $F_3(t)$  уравнения (15) при  $t = 0$  обращается в нуль, т.е.  $F_3(0) = 0$ .

Вычислим производную

$$\begin{aligned} F_3'(t) = & F_2'(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial k_1(t, \tau)}{\partial t} \mu(\tau) d\tau - k_1(t, t) \mu(t) + \\ & + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \frac{\partial K_1(t; \xi, \tau)}{\partial t} u(\xi, \tau) d\xi + \int_0^\ell K_1(t; \xi, t) u(\xi, t) d\xi \end{aligned}$$

В силу свойств функции Грина [24], легко убедиться в том, что функция  $k_1(t, \tau)$  и ее первые производные являются непрерывными. Правая часть  $F_3(t)$  – непрерывно дифференцируемая функция и  $F_3'(t)$  удовлетворяет условию Гельдера.

Согласно условию теоремы 3.3 и условию (3.41) (см. например [23]), обратив главную часть уравнения (16), получим

$$\mu(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t k_2(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = F_4(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^\ell K_2(t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} F_4(t) = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{F_2'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}; \quad k_2(t, \tau) = \frac{k_1(\tau, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} + \int_\tau^t \frac{k_1'(s, \tau)}{\sqrt{\tau-s}} ds; \\ K_2(t; \xi, \tau) = & \frac{K_1(\tau; \xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} + \int_\tau^t \frac{K_1'(\tau, \tau)}{\sqrt{\tau-s}} ds; \end{aligned}$$

В силу свойства функции Грина и оценки (2.11) на стр. 58 работы [22], легко заметим, что

$$|k_2(t, \tau)| \leq \frac{c_1}{\sqrt{t-\tau}}, \quad |K_2(t; \xi, \tau)| \leq \frac{c_2}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right\}.$$

Здесь и ниже через  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , будем обозначать положительные постоянные.

Уравнение (17) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью и с непрерывной правой частью.

Пусть  $R(t, \tau)$  резольвента ядра  $K_2(t; \xi, \tau)$ , тогда решение интегрального уравнения (16) запишем в виде

$$\mu(t) = F_5(t) + \int_0^t d\tau \int_0^\ell K_3(t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi, \quad (18)$$

здесь

$$F_5(t) = F_4(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t R(t, \tau) F_4(\tau) d\tau;$$

$$K_3(t; \xi, \tau) = K_2(t; \xi, \tau) + \int_\tau^t R(t, s) K_2(s; \xi, \tau) ds.$$

Подставляя найденное значение  $\mu(t)$  из (18) в формулу (12), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = F_6(x, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\ell K_4(x, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi, \quad (19)$$

где

$$F_6(x, t) = F_1(x, t) - \int_0^t \left( \int_0^x G_\xi(z, t; \ell, \tau) dz \right) F_5(\tau) d\tau;$$

$$K_4(x, t; \xi, \tau) = c(\xi, \tau) \int_0^x G_\xi(z, t; \ell, \tau) dz - \int_\tau^t \left( \int_0^x G_\xi(z, t; \ell, \tau) dz \right) K_3(\tau; \xi, s) ds.$$

В силу свойств функций  $K_4(x, t; \xi, \tau)$  и  $F_6(x, t)$  заключаем, что уравнение (19) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода, допускает единственное решение в классе непрерывно-дифференцируемых функций.

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи 1 доказана.

### § 3. Постановка и разрешимость нелокальной задачи 2

Пусть  $D$  означает область, описанную в разделе 1.

**Нелокальная задача 2.** Найти в области  $D$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), следующим граничным

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(0, t) = u_x(\ell, t) + \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (20)$$

и интегральным условиям

$$\int_0^{\ell} u(x, t) dx = \int_0^t h(t, \tau) u(\ell, \tau) d\tau + \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (21)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\mu_i(t)$ , ( $i = \overline{1, 3}$ ) и  $h(t, \tau)$  – заданные при  $x \in [0, \ell]$ ,  $t \in [0, T]$  и  $\tau \in [0, t]$ , непрерывные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0); \quad \varphi'(0) = \varphi'(\ell) + \mu_2(0); \quad \int_0^{\ell} \varphi(x) dx = \mu_3(0). \quad (*)$$

Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до  $x$  получим нагруженное уравнение теплопроводности вида

$$u_t - u_{xx} = -u_{xx}(0, t) - \int_0^x c(z, t) u(z, t) dz + f_1(x, t), \quad (22)$$

где

$$f_1(x, t) = \mu_1(t) + \int_0^x f(z, t) dz.$$

Для уравнения (22) получим следующую задачу:

**Задача 2.** Найти решение  $u(x, t)$  уравнения (22) удовлетворяющее условиям (2), (21) и условию Самарского-Ионкина

$$u_x(0, t) = u_x(\ell, t) + \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (23)$$

Для решения последней задачи поступим следующим образом.  
Обозначим

$$u_x(0, t) = \nu_1(t), \quad u(\ell, t) = \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (24)$$

здесь  $\nu_1(t)$  и  $\nu_2(t)$  – пока неизвестные функции.

Известно [19], что функция Грина смешанной задачи (2), (24) для уравнения теплопроводности задается формулой

$$G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[ U(x - \xi + 2n\ell, t - \tau) + U(x + \xi + 2n\ell, t - \tau) \right],$$

здесь  $U(x, t)$  – фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Из свойств функции Грина заключаем, что решение  $u(x, t)$  уравнения (22), удовлетворяющее условиям (2) и (24), имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi + \int_0^t \int_0^{\ell} G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau - \\ & - \int_0^t \nu_1(\tau) G(x, t; 0, \tau) d\tau + \int_0^t \nu_2(\tau) G_{\xi}(x, t; \ell, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^t \int_0^{\ell} G(x, t; \xi, \tau) \left[ u_{xx}(0, \tau) - \int_0^{\xi} c(z, \tau) u(z, \tau) dz \right] d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Введем обозначения

$$M_0(x, t; \tau) = - \int_0^{\ell} G(x, t; \xi, \tau) d\xi; \quad M_1(x, t; \xi, \tau) = -c(\xi, \tau) \int_{\xi}^{\ell} G(x, t; z, \tau) dz;$$

$$g_0(x, t) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi - \int_0^t \int_0^{\ell} G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Тогда равенство (25) представим в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t M_0(x, t; \tau) u_{xx}(0, \tau) d\tau - \int_0^t \nu_1(\tau) G(x, t; 0, \tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \nu_2(\tau) G_{\xi}(x, t; \ell, \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{\ell} M_1(x, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau + g_0(x, t), \end{aligned} \quad (26)$$

Формулу (26) будем рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра относительно функции  $u(x, t)$ , решение которого можно выписать через резольвенту  $R(x, t; \xi, \tau)$  ядра  $M_1(x, t; \xi, \tau)$  в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t \left[ M_0(x, t; \tau) + \int_0^{\ell} d\xi \left( \int_{\tau}^t R(x, t; \xi, s) M_0(\xi, \tau; s) ds \right) \right] u_{xx}(0, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^t \left[ G(x, t; 0, \tau) + \int_0^{\ell} d\xi \left( \int_{\tau}^t R(x, t; \xi, s) G(\xi, \tau; 0, s) ds \right) \right] \nu_1(\tau) d\tau + \end{aligned} \quad (27)$$

$$+ \int_0^t \left[ G_\xi(x, t; \ell, \tau) + \int_0^\ell d\xi \left( \int_\tau^t R(x, t; \xi, s) G_\xi(\xi, \tau; \ell, s) ds \right) \right] \nu_2(\tau) d\tau + g_1(x, t),$$

здесь

$$g_1(x, t) = g_0(x, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\ell R(x, t; \xi, \tau) g_0(\xi, \tau) d\xi$$

– известная функция.

В равенство (27) входят неизвестные функции  $u_{xx}(0, t)$ ,  $\nu_1(t)$  и  $\nu_2(t)$ . Переходим к их нахождению. Сначала находим нагруженное слагаемое  $u_{xx}(0, t)$ , для этой цели равенство (27) перепишем в виде

$$u(x, t) = \int_0^t K(x, t; \tau) u_{xx}(0, \tau) d\tau + \Phi(x, t), \quad (28)$$

где

$$K(x, t; \tau) = M_0(x, t; \tau) + \int_0^\ell d\xi \int_\tau^t R(x, t; \xi, s) M_0(\xi, \tau; s) ds; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = & - \int_0^t \left[ G(x, t; 0, \tau) + \int_0^\ell d\xi \left( \int_\tau^t R(x, t; \xi, s) G(\xi, \tau; 0, s) ds \right) \right] \nu_1(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \left[ G_\xi(x, t; \ell, \tau) + \int_0^\ell d\xi \left( \int_\tau^t R(x, t; \xi, s) G_\xi(\xi, \tau; \ell, s) ds \right) \right] \nu_2(\tau) d\tau + g_1(x, t). \end{aligned} \quad (30)$$

В дальнейшем, необходимо знать дифференциальные свойства ядра  $K(x, t, \tau)$  и свободного члена  $\Phi(x, t)$  в окрестности точки  $x = 0$ .

### 1. Дифференциальные свойства ядра $K(x, t; \tau)$ .

Но непосредственно дифференцировать два раза по  $x$  равенство (29) нельзя, так как  $K_{xx}(x, t, \tau)$  имеет существенную особенность при  $x = 0$ . Поэтому выделяем главную часть ядра  $K(x, t, \tau)$ . Функции Грина  $G(x, t; \xi, \tau)$  представим в виде

$$\begin{aligned} G(x, t; \xi, \tau) &= G_0(x, t; \xi, \tau) + [G(x, t; \xi, \tau) - G_0(x, t; \xi, \tau)] = \\ &= G_0(x, t; \xi, \tau) - 2G_1(x, t; \xi, \tau), \end{aligned}$$

где  $G_0(x, t; \xi, \tau)$  является функцией Грина второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке  $[0, \ell]$ , которая определяется равенством

$$G_0(x, t; \xi, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ U(x - \xi + 2n\ell, t - \tau) + U(x + \xi + 2n\ell, t - \tau) \right].$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{\ell} G_0(x, t; \xi, \tau) d\xi = 1, \quad (31)$$

в чем легко убедиться [24], воспользовавшись представлением функции Грина второй краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Функция  $G_1(x, t; \xi, \tau)$  имеет вид

$$G_1(x, t; \xi, \tau) = -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ U(x - \xi + 2(2k+1)\ell, t - \tau) + U(x + \xi + 2(2k)\ell, t - \tau) \right],$$

Таким образом, учитывая равенство (31) ядро  $K(x, t, \tau)$  можно представить в виде

$$K(x, t; \tau) = 1 - 2 \int_0^{\ell} G_1(x, t; \xi, \tau) d\xi + \int_0^{\ell} d\xi \int_{\tau}^t R(x, t; \xi, s) M_0(\xi, \tau; s) ds. \quad (32)$$

Двойной интеграл в правой части (32) и ее производные являются непрерывными и ограниченными функциями и при помощи неравенства [6]

$$z^n \exp\{-z^2\} \leq A_n \leq \infty, \quad n \in [0, \infty), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

легко установить оценку

$$\left| \int_0^{\ell} d\xi \int_{\tau}^t R(x, t; \xi, s) M_0(\xi, \tau; s) ds \right| \leq \int_0^{\ell} d\xi \int_{\tau}^t |R(x, t; \xi, s)| |M_0(\xi, \tau; s)| ds \leq c_3 \ell \pi,$$

Относительно ядра  $K(x, t, \tau)$ , имеет место утверждение:

**Лемма 1.** При  $t > \tau$ , ядро  $K(x, t, \tau) \in C_x^2(D)$  и при  $x = 0$  имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^2 K(x, t, \tau)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right| \leq M.$$

*Доказательство.* Дифференцируя равенство (32) под знаком интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x} &= -2 \int_0^\ell \frac{\partial G_1(x, t; \xi, \tau)}{\partial x} d\xi = 2 \int_0^\ell \frac{\partial G_1(x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi} d\xi = \\ &= 2G_1(x, t; \ell, \tau) - 2G_1(x, t; 0, \tau) = \\ &= 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} [-U(x + (4n + 1)\ell, t - \tau) + U(x + (4n + 3)\ell, t - \tau)]. \end{aligned}$$

Отсюда, еще раз дифференцируя по  $x$ , находим  $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} =$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{x + (4n + 1)\ell}{2(t - \tau)} U(x + (4n + 1)\ell, t - \tau) - \frac{x + (4n + 3)\ell}{2(t - \tau)} U(x + (4n + 3)\ell, t - \tau) \right].$$

В последнем равенстве, полагая  $x = 0$ , получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right|_{x=0} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(4n + 1)\ell}{2(t - \tau)} U((4n + 1)\ell, t - \tau) - \frac{(4n + 3)\ell}{2(t - \tau)} U((4n + 3)\ell, t - \tau) \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n + 1)\ell}{2(t - \tau)} \exp \left\{ -\frac{[(2n + 1)\ell]^2}{4(t - \tau)} \right\}. \quad (33) \end{aligned}$$

Общий член ряда (33) представим в виде

$$\begin{aligned} &\frac{(2n + 1)\ell}{4\sqrt{\pi(t - \tau)^3}} \exp \left\{ -\frac{[(2n + 1)\ell]^2}{4(t - \tau)} \right\} = \\ &= \frac{[(2n + 1)\ell]^3}{4\sqrt{\pi}(\sqrt{t - \tau})^3} \exp \left\{ -\frac{[(2n + 1)\ell]^2}{8(t - \tau)} \right\} \cdot \frac{1}{[(2n + 1)\ell]^2} \exp \left\{ -\frac{[(2n + 1)\ell]^2}{8(t - \tau)} \right\} \end{aligned}$$

Используя, известное неравенство [6], [22]

$$0 < \left\{ \frac{(2n + 1)\ell}{2\sqrt{t - \tau}} \right\}^3 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(2n + 1)\ell}{2\sqrt{t - \tau}} \right]^2 \right\} \leq c_4,$$

получим оценку для общего члена ряда (33)

$$\left| \frac{(2n + 1)\ell}{2(t - \tau)} U((2n + 1)\ell, t - \tau) \right| < \frac{2c_4}{\sqrt{\pi}[(2n + 1)\ell]^2} \exp \left\{ -\frac{[(2n + 1)\ell]^2}{8(t - \tau)} \right\}.$$

Так как  $(2n + 1)\ell \neq 0$  при  $\forall n \in N$ , то нетрудно убедиться, что знакоперевающийся ряд в правой части (33) сходится абсолютно и равномерно, т. е.

$$\left| \frac{\partial^2 K(x, t, \tau)}{\partial x^2} \right|_{x=0} \leq M.$$

Лемма 1 доказана.

## 2. Теперь исследуем свободный член равенства (28).

Функция  $\Phi(x, t)$  определенная равенством (30) состоит из суммы тепловых потенциалов (см. например [19], [21]). Для нахождения нагруженного слагаемого  $u_{xx}(0, t)$  из интегрального уравнения (28) достаточно показать существование ограниченного и непрерывного производного от  $\Phi_{xx}(x, t)$ .

Из теории тепловых потенциалов [21] можно сформулировать следующие свойства:

- 1) Если  $\varphi(x) \in C[0, \ell]$  и  $f(x, t) \in C_{x,t}^{\alpha,0}(\overline{D})$ , то при  $t > 0$  функция  $g_0(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D)$  и ограничена.
- 2) Если  $\nu_2(t) \in C(0, \infty)$ , то при  $x \neq \ell$  второй интеграл в правой части (30) принадлежит классу  $C_{x,t}^{2,1}(D)$  и ограничена.

Потенциал простого слоя  $g_2(x, t)$  определен на границе  $x = 0$ , поэтому надо доказать дифференцируемость и ограниченность

$$g_2(x, t) = - \int_0^t \left[ G(x, t; 0, \tau) + \int_0^\ell d\xi \left( \int_\tau^t R(x, t; \xi, s) G(\xi, \tau; 0, s) ds \right) \right] \nu_1(\tau) d\tau.$$

Относительно потенциала простого слоя  $g_2(x, t)$  докажем следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть функция  $\nu_1(t) \in C(0, +\infty)$  и  $\nu_1(0) = 0$ , тогда функция  $g_2(x, t) \in C_x^2(D)$  и имеет место

$$\left| \frac{\partial^2 g_2(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} \leq M.$$

*Доказательство.* Для краткости доказательства, рассмотрим сингулярное слагаемое функции  $g_2(x, t)$

$$g_2(x, t) = \int_0^t \nu_1(\tau) G(x, t; \ell, \tau) d\tau$$

При  $x \neq 0$  и  $t \neq \tau$ , ядро  $G(x, t; 0, \tau) \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{D})$ . Дифференцируя два раза по  $x$  под знаком интеграла имеем

$$\frac{\partial^2 g_2(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \nu_1(\tau) \frac{\partial^2 G(x, t; 0, \tau)}{\partial x^2} d\tau = - \int_0^t \nu_1(\tau) \frac{\partial G(x, t; 0, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая свойства функции Грина и  $\mu(0) = 0$ , получим

$$\frac{\partial^2 g_2(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \nu'_1(\tau) G(x, t; 0, \tau) d\tau. \quad (34)$$

В равенстве (34) правая часть является потенциалом простого слоя с ядром функции Грина  $G(x, t; 0, \tau)$ . При  $x = 0$ , правая часть (34) непрерывная и ограниченная функция при  $0 < t < T$ :

$$\frac{\partial^2 g_2(0, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \nu'_1(\tau) G(0, t; 0, \tau) d\tau.$$

где

$$G(0, t; 0, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp\left\{-\frac{[(2n+1)\ell]^2}{4(t-\tau)}\right\}.$$

Лемма 2 доказана.

Из доказанных лемм следует, что равенство (28), можно дифференцировать по  $x$  два раза. Поэтому из равенства (28) дифференцируя по  $x$ , затем полагая  $x = 0$ , относительно  $u_{xx}(0, t)$  получим интегральное уравнение Вольterra второго рода

$$u_{xx}(0, t) = \int_0^t K_{xx}(0, t, \tau) u_{xx}(0, \tau) d\tau + \Phi_{xx}(0, t). \quad (35)$$

Легко заметить, что ядро и правая часть интегрального уравнения (35) являются непрерывными и ограниченными функциями. Решение  $u_{xx}(0, t)$  интегрального уравнения (35) можно найти методом последовательных приближений.

Пусть  $R_0(t, \tau)$  – резольвентное ядро, соответствующее ядру  $K_{xx}(0, t, \tau)$ , тогда решение уравнения (35) представимо в виде

$$u_{xx}(0, t) = \int_0^t N_1(t, \tau) \nu_1(\tau) d\tau + \int_0^t N_2(t, \tau) \nu_2(\tau) d\tau + \Phi_1(t), \quad (36)$$

где

$$N_1(t, \tau) = G_{1xx}(0, t; 0, \tau) + \int_{\tau}^t R_0(t, s) \left[ G_{1xx}(0, \tau; 0, s) + k_{0xx}(0, s, \tau) \right] ds;$$

$$N_2(t, \tau) = G_{1\xi xx}(0, t; \ell, \tau) + \int_{\tau}^t R_0(t, s) \left[ G_{1\xi xx}(0, \tau; \ell, s) + k_{1xx}(0, s, \tau) \right] ds;$$

$$\Phi_1(t) = \Phi_{xx}(0, t) + \int_0^t R_0(t, \tau) \Phi_{xx}(0, \tau) d\tau$$

здесь

$$k_0(x, t, \tau) = \int_0^{\ell} d\xi \int_{\tau}^t R(x, t; \xi, s) G(\xi, \tau; 0, s) ds;$$

$$k_1(x, t, \tau) = \int_0^{\ell} d\xi \int_{\tau}^t R(x, t; \xi, s) G_{\xi}(\xi, \tau; \ell, s) ds.$$

Подставляя значение  $u_{xx}(0, t)$  из (36) в формулу (27), получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \left[ G(x, t; 0, \tau) + k_2(x, t, \tau) \right] \nu_1(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \left[ G_{\xi}(x, t; \ell, \tau) + k_3(x, t, \tau) \right] \nu_2(\tau) d\tau + \Phi_2(x, t), \end{aligned} \quad (37)$$

здесь  $\Phi_2(x, t)$  – известная функция.

$$k_2(x, t, \tau) = k_0(x, t, \tau) + \int_{\tau}^t K(x, t, s) N_1(s, \tau) ds;$$

$$k_3(x, t, \tau) = k_1(x, t, \tau) + \int_{\tau}^t K(x, t, s) N_2(s, \tau) ds.$$

Теперь определим неизвестные функции  $\nu_1(t)$  и  $\nu_2(t)$  удовлетворяя условиям (21) и (23).

Интегрируя (37) по  $x$  в пределах от 0 до  $\ell$  будем иметь

$$\int_0^{\ell} u(x, t) dx = \int_0^t \left\{ \int_0^{\ell} \left[ G(x, t; 0, \tau) + k_2(x, t, \tau) \right] dx \right\} \nu_1(\tau) d\tau -$$

$$- \int_0^t \left\{ \int_0^\ell \left[ G_\xi(x, t; \ell, \tau) + k_3(x, t, \tau) \right] dx \right\} \nu_2(\tau) d\tau + \int_0^\ell \Phi_2(x, t) dx, \quad (38)$$

В формуле (37) положим  $x = l$  и умножим обе части на  $h(t, \tau)$ , полученное при этом выражение проинтегрируем по  $\tau$  в пределах от 0 до  $t$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t h(t, \tau) u(\ell, \tau) d\tau &= \int_0^t \left\{ \int_\tau^t h(t, s) \left[ G(\ell, s; 0, \tau) + k_2(\ell, \tau, s) \right] ds \right\} \nu_1(\tau) d\tau - \\ &- \int_0^t h(t, \tau) \left\{ \int_\tau^t \left[ G_\xi(\ell, s; \ell, \tau) + k_3(\ell, \tau, s) \right] ds \right\} \nu_2(\tau) d\tau + \int_0^t h(t, \tau) \Phi_2(\ell, t) dx, \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что

$$\int_0^\ell dx \int_0^t \nu_2(\tau) G_\xi(x, t; \ell, \tau) d\tau = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu_2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t G(0, t; \ell, \tau) \nu_2(\tau) d\tau.$$

Тогда формула (38) примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u(x, t) dx &= \int_0^t \left\{ \int_0^\ell \left[ G(x, t; 0, \tau) + k_2(x, t, \tau) \right] dx \right\} \nu_1(\tau) d\tau - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu_2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \left\{ G(0, t; \ell, \tau) + \int_0^\ell k_3(x, t, \tau) dx \right\} \nu_2(\tau) d\tau + \int_0^\ell \Phi_2(x, t) dx, \end{aligned} \quad (40)$$

Согласно условию (21), из равенств (39) и (40), получим следующее соотношение

$$\int_0^t N_3(t, \tau) \nu_1(\tau) d\tau - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu_2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t N_4(t, \tau) \nu_2(\tau) d\tau = \Phi_3(t); \quad (41)$$

здесь

$$N_3(t, \tau) = \int_0^\ell [G(x, t; 0, \tau) + k_2(x, t, \tau)] dx + \int_\tau^t h(t, \tau) [G(\ell, t; 0, \tau) + k_2(\ell, \tau, s)] ds;$$

$$N_4(t, \tau) = G(0, t; \ell, \tau) + \int_0^\ell k_3(x, t, \tau) dx - \int_\tau^t h(t, s) [G_\xi(\ell, s; \ell, \tau) + k_3(\ell, \tau, s)] ds;$$

$$\Phi_3(t) = \mu_3(t) - \int_0^\ell \Phi_2(x, t) dx + \int_0^t h(t, \tau) \Phi_2(\ell, \tau) d\tau.$$

Удовлетворяя (37) краевому условию (23), получим следующее уравнение

$$\nu_1(t) = \int_0^t N_5(t, \tau) \nu_1(\tau) d\tau - \int_0^t N_6(t, \tau) \nu_2(\tau) d\tau + \Phi_4(t), \quad (42)$$

где  $\Phi_4(t) = \mu_3(t) + \Phi_{2x}(\ell, t) + \Phi_{2x}(0, t)$  – известная функция;

$$N_5(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} + \frac{1}{(t-\tau)^{5/2}} \right] \exp \left\{ -\frac{\ell^2}{4(t-\tau)} \right\} +$$

$$+ k_{2x}(0, t, \tau) + k_{2x}(\ell, t, \tau);$$

$$N_6(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(t-\tau)^{5/2}} \exp \left\{ -\frac{\ell^2}{4(t-\tau)} \right\} + k_{3x}(0, t, \tau) + k_{3x}(\ell, t, \tau).$$

Таким образом, для определения функции  $\nu_1(t)$  и  $\nu_2(t)$  получим систему интегральных уравнений (41) и (42) относительно неизвестных функций  $\nu_1(t)$  и  $\nu_2(t)$ .

В силу оценок функции Грина [22]

$$\left| \frac{\partial^{i+j} G(x, t; \xi, \tau)}{\partial x^i \partial t^j} \right| < \frac{c_5}{(t-\tau)^{(i+2j+1)/2}} \exp \left\{ -c_6 \frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4(t-\tau)} \right\}, \quad (43)$$

получим, что

$$|N_3(t, \tau)| \leq \frac{c_7}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp \left\{ -\frac{c_8}{4(t-\tau)} \right\};$$

$$|N_4(t, \tau)| \leq \frac{c_9}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left\{ -\frac{c_{10}}{4(t-\tau)} \right\};$$

$$|N_5(t, \tau)| \leq \frac{c_{11}}{\sqrt{t-\tau}}; \quad |N_6(t, \tau)| \leq \frac{c_{12}}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Нетрудно видеть, что правые части интегральных уравнений (41)-(42)  $\Phi_3(t), \Phi_4(t) \in C[0, T]$ , а ядра имеют интегрируемые особенности при  $\tau \rightarrow t$ . Тогда из общей теории (см. например [26]) следует, что система уравнений (41)-(42) допускает единственное решение,  $\nu_1(t)$  и  $\nu_2(t)$  в классе непрерывных функций.

**Теорема 2.** Если заданные функции  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\mu_i(t)$ , ( $i = \overline{1, 3}$ ),  $h(t, \tau)$  удовлетворяют условиям  $c(x, t)$ ,  $f(x, t) \in C(\overline{D})$  и  $\varphi(x) \in C^2[0, \ell]$ ;  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_3(t) \in C^1[0, T]$ ;  $\mu_2(t) \in C[0, T]$ ;  $h(t, \tau) \in C[0, T]$ , то нелокальная задача 2 имеет регулярное решение в виде (26), где нагруженное слагаемое  $u_{xx}(0, t)$  определяется как решение интегрального уравнения (35).

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи 2 доказана.

### Список литературы

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.*, 1963. Vol. 21, No. 2. pp. 155–160.
2. Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями, // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Том 4, №6. –С. 1006–1024.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием, // *Дифференц. уравнения*, 1977. Том 13, №2. –С. 294–304.
4. Юрчук Н. И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // *Дифференц. уравнения*, 1986, Том 22, №12. –С. 2117–2126.
5. Bouziani A. Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation // *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 1996, 9. –Р. 323–330.
6. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // *Дифференц. уравн.*, 2004. Том 40, №4. –С. 547–564.
7. Бейлин А. Б., Богатов А. В., Пулькина Л. С. Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2022, номер 2. –С. 380–395.
8. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Интегральный аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // *Матем. заметки*, 2022. Том 111, выпуск 4. –С. 540–550.

9. Попов Н. С. О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида // *Матем. заметки СВФУ*. 2016. Том 23, №1. –С. 79–86.
10. Кожанов А. И., Попов Н. С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // *Вестник НГУ. Серия: Матем., механ. и информ.* 2010. Том 10, вып. 3. –С. 46–62.
11. Попов Н. С. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // *Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2015, 3(125). –С. 29–43.
12. Кожанов А. И., Тарасова Г. И. Задача Самарского–Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // *Изв. Иркутск. гос. унив. Сер. Математика*, 2022. Том 42. –С. 59–74.
13. Кожанов А. И., Хромченко Д. С. Нелокальные задачи с интегрально-возмущенным условием А. А. Самарского для квазипараболических уравнений третьего порядка // *Матем. заметки СВФУ*. 2023. Том 30, выпуск 4. –С. 12–23.
14. Zikirov O. S., Sagdullayeva M. M. Solvability of nonlocal problem with integral condition for third-order equation // *J. Math. Sci.* 2024. Vol. 284, No. 2. –P. 287–298. DOI 10.1007/s10958-024-07350-3
15. Zikirov O. S. A non-local boundary value problem for third-order linear partial differential equation of composite type, // *Math. Modell. and Anal.* 2009. Vol. 14, No. 3. –P. 407–421.
16. Zikirov O. S. On solvability of the Dirichlet problem for the third-order hyperbolic equation, // *Matematikos Rinkiny*s, 2010. Vol. 50, №2. –P. 239–247.
17. Джураев Т. Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка. // *Дифференц. уравнения*, 1991. Том 27, №10, (1991), 1734–1745.
18. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // *Дифференц. уравнения*, 2004. Том 40, №6. –С. 763–774.

19. Орынбасаров М. О. Решение смешанной задачи для уравнения третьего порядка составного типа в полуполосе. // *Изв. НАН РК. Серия физико-математическая*, 2009, №1. – С. 3–8.
20. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа*. Ташкент.; "Фан". 1986. – 220 с.
21. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа*. – М.: Мир. 1968. – 427 с.
22. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*. – Ташкент.: «Фан», 1979. – 240 с.
23. Зикиров О. С. *Краевые задачи теории уравнений гиперболического и составного типов третьего порядка*. – Ташкент. "Университет". 2022. – 200 с.
24. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
25. Сопуев А., Аркабаев Н. К. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2013, №1(21). С. 16–23.
26. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

## References

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.*, 1963. Vol. 21, No. 2. pp. 155–160.
2. Kamynin L. I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1978. V. 4, № 6. P. 33–59.
3. Ionkin N. I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition // *Differ. Uravn.*, 1977. V. 13, № 2. P. 294–304.
4. Yurchuk N. J. A mixed problem with an integral condition for some parabolic equations // *Differ. Uravn.*, 1986. V. 22, № 12. P. 2117–2126.
5. Bouziani A. Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation // *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 1996, 9. – P. 323–330.

6. Ivanchov N. I. Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions// *Differ. Equ.*, 2004. V. 40, № 4. P. 591–609.
7. Beylin A. B., Bogatov A. V., Pulkina L. S. A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation// *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2022. V. 26, № 2. P. 380–395.
8. Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. Integral Analogue of the First Initial-Boundary Value Problem for Second-Order Hyperbolic and Parabolic Equations// *Math. Notes*, 2022. V. 111, № 4. P. 562–570.
9. Popov N. S. On the solvability of boundary value problems for multidimensional parabolic equations of fourth order with nonlocal boundary condition of integral form// *Mathematical notes of NEFU*, 2016. V. 23, № 1. P. 79–86.
10. Kozhanov A. I., Popov N. S. On solvability to nonlocal boundary value problems for pseudoparabolic equations// *J. Math. Sci.*, 2012. V. 186, № 3. P. 438–452.
11. Popov N. S. On the solvability of spatial nonlocal boundary value problems for one-dimensional pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations// *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*. 2015. № 3(125). P. 29–43.
12. Кожанов А. И., Тарасова Г. И. The Samarsky–Ionkin problem with integral perturbation for a pseudoparabolic equation // *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 2022. V. 42. P. 59–74.
13. Kozhanov A. I., Khromchenko D. S. Nonlocal problems with an integrally-disturbed A. A. Samarskii condition for third order quasi-parabolic equations // *Mathematical notes of NEFU*. 2023. V. 30, № 4. P. 12–23.
14. Zikirov O. S., Sagdullayeva M. M. Solvability of nonlocal problem with integral condition for third-order equation // *J. Math. Sci.* 2024. Vol. 284, No. 2. –P. 287–298. DOI 10.1007/s10958-024-07350-3
15. Zikirov O. S. A non-local boundary value problem for third-order linear partial differential equation of composite type, // *Math. Modell. and Anal.* 2009. Vol. 14, No. 3. –P. 407–421.
16. Zikirov O. S. On solvability of the Dirichlet problem for the third-order hyperbolic equation, // *Matematikos Rinkiny*, 2010. Vol. 50, №2. –P. 239–247.

17. Dzhuraev T. D., Popelek Ya. Classification and reduction to canonical form of third-order partial differential equations// *Differ. Equ.*, 1991. V. 27, № 10. P. 1225–1235.
18. Kozhanov A. I. On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation// *Differ. Equ.*, 2004. V. 40, № 6. P. 815–826.
19. Orynbasarov M. O. Solution of a mixed problem for a third-order equation of a composite type in a half-band.// *Izv. NAS RK. Physics and mathematics series*, 2009, №1. –P. 3–8.
20. Dzuraev T. D., Sopuev A., Mamazhanov M. *Boundary value problems for equations of parabolic-hyperbolic type*. Tashkent.; "Fan". 1986. – 220 p.
21. Friedman A. *Partial differential equations of the parabolic type*. – Moscow: Mir, 1968. – 427 p.
22. Dzhuraev T. D. *Boundary value problems for equations of mixed and mixed-compound types*. – Tashkent.: "Fan" 1979. – 240 p.
23. Zikirov O. S. *Boundary value problems in the theory of hyperbolic and composite equations of the third order*. – Tashkent. "University". 2022. – 200 p.
24. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. *Equations of mathematical physics*. – M.: Nauka Publ., 1977. –736 p.
25. Sopuev A., Arkabaev N. K. Interface problems for linear pseudo-parabolic equations of the third order// *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.* 2013. V. 21, № 1. P. 16–23.
26. Nakhushiev A. M. *Equations of Mathematical Biology*. — M.: Higher School, 1995. –301 p.

### Информация об авторе

Обиджан Салижанович Зикиров, доктор физико-математических наук, профессор  
SPIN 1903-0867 AuthorID: 326983  
Scopus Author ID 23104682600

### Author Information

Obidjon S. Zikirov, Doctor of Mathematics, Professor

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 42-66

Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 42-66

SPIN 1903-0867 AuthorID: 326983  
Scopus Author ID 23104682600

*Статья поступила в редакцию 16.09.2025;  
одобрена после рецензирования 09.12.2025; принята к публикации  
21.01.2026*

*The article was submitted 16.09.2025;  
approved after reviewing 09.12.2025; accepted for publication 21.01.2026*